فصل ۳

احتمال

۱.۳ مقدمه

در زبان روزمره کلمه احتمال را برای رویدادهای نامطمئن و تا حدودی ممکن بکار می بریم. برخی اوقات نیز احتمال در مفاهیمی چون شانس و اقبال و مشکوک برای ما ابراز شده و برای رخدادی است که جنبه صددرصد ندارد. در این بخش ما بر آنیم تا احتمال را تشریح و قوانین آنرا در معنای **مطمئن** بکار ببریم.

در ابتدا کاردان[۱] (۱۵۷۶—۱۵۰۱) و گالیله (۱۶۴۲—۱۵۶۴) دانشمندان ایتالیائی، با طرح مساله شانس برد در بازی ها کارهائی انجام دادند که مورد توجه قماربازان ایتالیائی قرار گرفت. سپس یکی از اشراف زادگان و قماربازان معروف فرانسه برای توضیح علت برد و باخت با تاس و نرد به دو ریاضیدان مشهور فرانسوی پاسکال[۲] (۱۶۶۲—۱۶۲۳) و فرما[۳] (۱۶۶۵—۱۶۰۱) متوسل شد و احتمال بصورت یک علم مطرح گردید. در قرن هفدهم و هجدهم این مسأله مورد توجه ریاضیدانان بسیاری قرار گرفت و ماحصل نتایج را لاپلاس در کتابی با نام **تئوری تحلیلی احتمالات** (۱۸۲۰—۱۸۱۲) آورد که تفسیری از نظریه کلاسیک ریاضی احتمالات بود. لاپلاس احتمال یک پیشامد را بصورت کسری تعریف نمود و سپس دانشمندانی چون دانیل برنولی، ژاکوب برنولی، آبراهام موآور، ژان دالامبر، توماس بیس و ژوزف لوپیز[۴] درباره احتمالات کار کردند. کولموگروف (۱۹۸۷— ۱۹۰۳) ریاضیدان روسی در سال ۱۹۳۳ اصول احتمال را معرفی کرد و به احتمال جنبهٔ کاملاً ریاضی داد. گسترش این علم باعث شده تا هم اکنون احتمالات در علوم مختلف، منجمله علوم اجتماعی و حتی علوم قضائی و پزشکی ابزار مهمی برای تحلیل پدیده‌ها بحساب آید.

طی سدهٔ بعدی این علم جدا از علم آمار مورد بحث قرار گرفت و سپس ایندو با هم تلفیق شدند. بنظر می رسد آنچه در احتمال باید تحلیل شود می بایست از آمار بدست آید. امروزه استنتاج نتایج آماری بدست احتمال انجام می شود و در عین حال احتمال در شاخه های دیگر علوم نیز جایگاه خاص خود را داراست.

این مساله پیش می آید که اختلاف و انحراف نتایج آماری تا چه حد به حقیقت نزدیک است. این مساله را کارل فدریک گاوس در کتابش با نام **ریاضیات گسسته**[۵] در ۱۸۰۱ به طرح آن پرداخته است. احتمالات نقش بزرگی در نظریات اساسی

---

[۱] *Liber de ludo aleae* انتشار در ۱۵۶۳م.

[۲] *Pascal, Blaise*

[۳] *Fermat, Pierre de*

[۴] *Bernoulli, Daniel; Bernoulli, Jakob; Moivre, Abraham de; Alembert, Jean Le Rond d'; Bayes, Thomas*

[۵] *Disquisitiones Arithmeticae*

بسیاری از علوم طبیعی و استنتاج نتایج آزمایشگاهی بازی می کند نخستین بار این فرضیه ها در قرن نوزدهم توسط جیمز کلارک ماکسول و اودویک بولتزمان در نظریه جنبشی گازها بکار برده شد. همچنین احتمالات در مکانیک آماری توسط ژوزف گیبس[۶] بکار برده شد و نیز توسط انیشتین در فیزیک و مندل در وراثت بکار گرفته شد.

مهمترین استعمال احتمال شبیه سازی است و آن مدلسازی سیستم های طبیعی و سیستم های انسانی است. با شبیه سازی و ایجاد یک مدل مناسب می توان آثار واقعی برخی شرایط احتمالی را بازسازی نمود.

۲.۳ احتمال

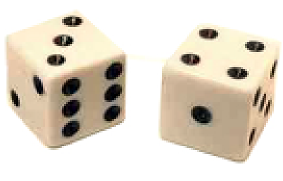
برای رسیدن به حالت کلی یک واقعه می بایست آزمایشات گوناگونی برای رخدادن آن واقعه انجام داد. آزمایش تصادفی به رویدادی گفته می شود که حاصل یک تصادف بوده و نتیجهٔ آن **بطور حتم** مشخص نباشد ولی بتوان حالات مختلف آن را مشخص نمود. هر حالت ممکن رویداد را یک **پیشامد ساده** گفته، مجموعهٔ چند پیشامد ساده را **پیشامد تصادفی** گوئیم و مجموعه‌ای متشکل از تمام پیشامدهای ممکن برای آن رویداد را **فضای نمونه** گویند. فضای نمونهٔ یک آزمایش را با S نشان داده و پیشامدها را با حروف بزرگ $A, B, C, \cdots$ مشخص می کنیم. برای مثال یک تاس را می ریزیم، در این حالت ممکن است اعداد یک تا شش ظاهر شود ولی رویداد دیگری ممکن نیست بنابراین می نویسیم:

$$S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$$

در این آزمایش پیشامد وقوع عدد ۵ را برابر A، پیشامد وقوع عدد زوج را B و پیشامد وقوع عدد اول را C می گیریم بنابراین:

$$A = \{۵\} \quad , \quad B = \{۲, ۴, ۶\} \quad , \quad C = \{۲, ۳, ۵\}$$

تعداد اعضای یک مجموعه مانند X را با $n(X)$ نشان می دهیم. در مثال بالا $n(S) = ۶$ است. احتمال وقوع یک پیشامد مانند A را چنین تعریف می کنیم.



$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

مطابق این تعریف احتمال پیشامدهای بالا در ریختن تاس چنین است:

$$p(A) = \frac{۱}{۶} \quad , \quad p(B) = \frac{۳}{۶} \quad , \quad p(C) = \frac{۳}{۶}$$

مثال ۱.۲.۳ در پرتاب یک سکه احتمال رو آمدن آن چیست؟

حل. فضای نمونه عبارتست از $S =$ { رو ، پشت } و پیشامد رو آمدن $A =$ { رو } است بنابراین $p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱}{۲}$

مثال ۲.۲.۳ یک سکه را سه بار پرتاب می کنیم، فضای نمونه را بنویسید؟

حل. اگر رو را با H و پشت را با T نشان دهیم، فضای نمونه عبارت خواهد بود از

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

[۶] Joseph Willard Gibbs

۱.۲.۳ فضای نمونه

گفتیم که مجموعهٔ تمام پیشامدهای ممکن برای یک آزمایش را با فضای نمونهٔ S مشخص می کنیم. در هر آزمایش تصادفی برای مشخص بودن و بی ابهام بودن فضای نمونه، باید شرایط آزمایش کاملاً مشخص و تعیین شده باشد. علاوه بر این فضای نمونه ممکن است متناهی (با پایان) یا نامتناهی (بی پایان) باشد. در آزمایش تاس و نیز مثال۲.۲.۳ فضای نمونه متناهی است.

مثال ۳.۲.۳ سکه ای را آنقدر پرتاب می کنیم تا بالاخره خط بیاید. فضای نمونه را مشخص کنید.

حل. اگر شیر را با H و خط را با T نشان دهیم، فضای نمونه عبارت خواهد بود از

$$S = \{T, HT, HHT, HHHT, HHHHT, HHHHHT, \cdots\}$$

مثال ۴.۲.۳ در ریختن دو تاس، فضای نمونه برای مجموع اعداد دو تاس چنین است.

		تاس اول ۱	۲	۳	۴	۵	٦
تاس دوم	۱	۲	۳	۴	۵	٦	۷
	۲	۳	۴	۵	٦	۷	۸
	۳	۴	۵	٦	۷	۸	۹
	۴	۵	٦	۷	۸	۹	۱۰
	۵	٦	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
	٦	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲

از جدول مشخص است که $n(S) = ٦ \times ٦ = ۳٦$. اکنون احتمالات زیر را حساب می کنیم:

A) احتمال آنکه مجموع اعداد روی دو تاس برابر ۳ باشد.

حل. از جدول مشخص است که تنها دو حالت ممکن است بنابراین $p(A) = \frac{۲}{۳٦}$

B) احتمال آنکه مجموع اعداد دو تاس حداکثر ۴ باشد.

حل. در جدول می بینیم که حالات ممکن شش حالتند پس $p(B) = \frac{٦}{۳٦}$

C) احتمال آنکه مجموع اعداد روی دو تاس فرد باشد.

حل. جدول نشان می دهد که مجموع اعداد ظاهر شده نیمی از آنها فرد است $p(C) = \frac{۱۸}{۳٦}$

D) احتمال آنکه مجموع اعداد روی دو تاس بیشتر از ٦ و زوج باشد.

حل. اعداد بیشتر از شش و زوج عبارتند از $D = \{۸, ۸, ۸, ۸, ۸, ۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۲\}$ بنابراین $p(D) = \frac{۹}{۳٦}$

۲.۲.۳ تفسیر احتمال

احتمال در واقع حد فراوانی نسبی است وقتی که n به بینهایت می رود. یعنی

$$p(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}$$

که در آن n کل حالات وقوع رخداد و m تعداد وقوع پیشامد A است.

۳.۲.۳ قوانین احتمال

احتمالی که در بالا بحث شد احتمالی ریاضی بوده و عبارتست از میزان اطمینانی که مطلقاً می توان نسبت به وقوع یک پیشامد داشت. در فصول آینده در بارهٔ **احتمال آماری** نیز سخن خواهیم گفت. در یک فضای احتمال کلیه پیشامدها زیر مجموعهٔ فضای نمونه هستند. از آنجائیکه پیشامدها مجموعه اند، می توان اجتماع و اشتراک و تفاضل را برای آنها تعریف نمود. علاوه بر این **مکمل** یک پیشامد مانند A را با A' نشان داده و $A' = S - A$. برای احتمال پیشامدهای A, B در فضای نمونه S قوانین زیر برقرارند:

ا) برای هر پیشامد A داریم: $\phi \subseteq A \subseteq S$

ب) احتمال یک پیشامد نامنفی و حداکثر یک است $0 \leq p(A) \leq 1$

ج) پیشامد حتمی پیشامدی است که حتماً رخ داده و احتمال آن یک است، $P(A) = 1$

د) پیشامد غیرممکن پیشامدی است که وقوع آن محال و احتمالش صفر است، $P(A) = 0$

ه) برای دو پیشامد A و B داریم $A \subseteq B \Rightarrow p(A) \leq p(B)$ در این حالت A را زیر پیشامد B گوئیم

و) برای دو پیشامد A و B اگر آنها با هم رخ دهند می نویسیم $A \cap B$ و اگر یکی از آنها رخ دهد یعنی $A \cup B$ و در حالت کلی داریم $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

ز) برای مکمل پیشامد A می توان براحتی نتیجه گرفت که $p(A') = 1 - p(A)$.

تمرین ۱.۲.۳ کلاسی. قانون (و) بالا را برای سه پیشامد A و B و C تعمیم دهید.

مثال ۵.۲.۳ از بین ۵۰ کارت که اعداد ۱ تا ۵۰ روی آنها نوشته شده یک کارت بیرون می آوریم

الف) احتمال آنکه عدد کارت خارج شده فرد باشد $P(A) = \frac{25}{50}$

ب) احتمال آنکه عدد بدست آمده بر ۳ بخش پذیر باشد $P(B) = \frac{16}{50}$

ج) احتمال آنکه عدد بدست آمده بر ۳ بخش پذیر نباشد $P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{16}{50} = \frac{34}{50}$

د) احتمال آنکه عدد کارت خارج شده حداقل ۲۰ و فرد باشد $P(C) = \frac{15}{50}$

ه) احتمال آنکه عدد کارت حداقل صفر باشد، احتمال حتمی بوده و $P(D) = \frac{50}{50} = 1$

و) احتمال آنکه عدد بدست آمده حداکثر ۲۰ یا بر ۴ بخش پذیر باشد. در این حالت فرض کنید E مجموعهٔ اعداد حداکثر ۲۰ و F اعدادی که بر ۴ بخش پذیرند. از قوانین احتمال قسمت (و) داریم:

$$p(E \cup F) = p(E) + p(F) - p(E \cap F) = \frac{20}{50} + \frac{12}{50} - \frac{5}{50} = \frac{27}{50}$$

مثال ۶.۲.۳ از بین ۲۰ کارت که ۱۵ کارت آن قرمز و ۵ کارت سبز هستند، ۳ کارت انتخاب می کنیم احتمال اینکه (A) هر سه کارت از یک رنگ باشند. (B) دو کارت قرمز و یک کارت سبز باشد. (C) حداقل ۲ کارت سبز باشد.

حل. فضای نمونه در این حالت $n(S) = C_3^{20}$ بوده و داریم:

$$p(A) = \frac{C_3^{15} + C_3^{5}}{C_3^{20}} \quad , \quad p(B) = \frac{C_2^{15} \times C_1^{5}}{C_3^{20}} \quad , \quad p(C) = \frac{C_2^{5} \times C_1^{15} + C_3^{5} \times C_0^{15}}{C_3^{20}}$$

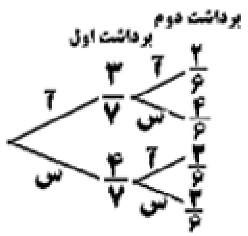
تمرین ۲.۲.۳ کلاسی. از کیسه ای حاوی ۴ مهرهٔ سفید، ۲ مهرهٔ قرمز و ۵ مهرهٔ آبی، ۴ مهره به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال آنکه

الف) هر چهار مهره همرنگ باشند.

ب) دقیقا ۲ مهره آبی باشد.

ج) ۴ مهره هرکدام از یک رنگ باشند.

د) حداکثر یک مهره قرمز باشد.



مثال ۷.۲.۳ کیسه ای حاوی ۳ مهرهٔ آبی و ۴ مهرهٔ سبز است. از این کیسه دو مهره **بترتیب** بیرون می آوریم احتمال اینکه دو مهره همرنگ نباشند چقدر است؟

حل. نمودار درختی این دو برداشت بصورت مقابل است. مسلماً یا در برداشت اول مهره آبی و در برداشت دوم سبز است و **یا** در برداشت اول مهره سبز و در برداشت دوم آبی است پس $\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}+\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}$ و جواب $\frac{24}{42}$ خواهد بود.

مطلب ۱.۲.۳ اگر وقوع دو پیشامد مانند A و B هر دو با هم غیرممکن باشد گوئیم دو پیشامد A و B **ناسازگار** هستند و می نویسیم $A\cap B=\phi$. دو پیشامد A و B را مستقل گوئیم اگر $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$. در مثال۵.۲.۳ (د) و (و) ناسازگارند.

مثال ۸.۲.۳ دو تیرانداز A و B قادرند بترتیب با احتمال $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{5}$ هدفی را بزنند. اگر این دو با هم شلیک کنند احتمال زدن هدف چقدر است؟

حل. طبق تعریف استقلال $p(A\cap B)=p(A)p(B)=\frac{2}{15}$ و طبق قوانین احتمالات

$$p(A\cup B)=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}-\frac{2}{15}=\frac{3}{5}$$

تمرین ۳.۲.۳ منزل.

۱) در ریختن دو تاس، برای تفاضل اعداد دو تاس، (الف) احتمالات زیر را بدست آورید. (A) احتمال آنکه تفاضل اعداد روی دو تاس برابر ۲ باشد. (B) احتمال آنکه تفاضل اعداد دو تاس حداکثر صفر باشد. (C) احتمال اینکه تفاضل اعداد دو تاس فرد باشد. (D) احتمال آنکه تفاضل اعداد روی دو تاس بیشتر از -1 یا زوج باشد. (ب) آیا پیشامدهای B و C مستقلند؟ (ج) آیا پیشامدهای C و D سازگارند؟

۲) از بین ۱۰ کارت که ۴ کارت آن قرمز و ٦ کارت سبز آن هستند، ۲ کارت انتخاب می کنیم. احتمال اینکه (A) این دو کارت از یک رنگ باشند (B) یکی از کارتها قرمز و دیگری سبز باشد (C) دو کارت همرنگ نباشند (D) یکی از کارتها قرمز نباشد.

۳) از بین ۱۲ توپ که ۳ تای آنها آبی، ۵ تای آنها قرمز و ۴ تا سفید هستند، ۳ توپ بیرون می آوریم. احتمال اینکه (A) سه توپ همرنگ باشند (B) سه توپ همرنگ نباشند (C) دوتا از توپ ها قرمز باشند (D) حداقل یکی از توپها آبی باشد.

۴) در جعبه ای ۸ مهره سفید و ۵ مهره قرمز و ۲ مهره سبز وجود دارد. سه مهره به تصادف خارج می کنیم احتمال اینکه:

الف) سه مهره سفید باشند.

ب) یک مهره سفید و دو مهره سبز باشند.

ج) هیچکدام همرنگ نباشند.

د) دقیقاً دو مهره همرنگ باشند.

۵) در یک آزمایش تصادفی، سکه را آنقدر می اندازیم تا بالاخره خط بیاید. فضای نمونه را برای این آزمایش نوشته و پیشامدهای زیر را بنویسید. الف) پیشامد اینکه سه شیر بیاید. ب) پیشامد اینکه دقیقاً یک شیر بیاید. ج) پیشامد اینکه حداقل ۵ شیر بیاید.

٦) سکه ای را سه بار پرتاب می کنیم. احتمال اینکه الف) دقیقا دو بار شیر بیاید. ب) دو بار خط و یکبار شیر بیاید. ج) حداقل یک بار شیر بیاید. د) در پرتاب دوم شیر بیاید.

۷) درون دایره ای با شعاع R نقطه ای انتخاب می کنیم. احتمال اینکه فاصلهٔ این نقطه تا مرکز دایره $\frac{R}{۴}$ باشد چقدر است؟

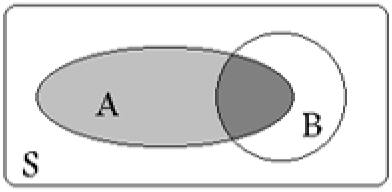
۸) احتمال تولد پسر و دختر در خانواده‌ای $\frac{۱}{۲}$ است. در خانوادهٔ ۵ فرزندی احتمال داشتن سه پسر چقدر است؟

۳.۳ احتمال شرطی

در برخی موارد رخدادن یک پیشامد وابسته به پیشامدی قبلی است. فرض کنید پیشامد A رخ داده و احتمال آن $p(A) > ۰$ باشد. سپس پیشامد دومی مانند B بخواهد بعد از A اتفاق بیافتد. در این حالت احتمال پیشامد B بستگی به احتمال پیشامد A داشته و چنین تعریف می شود:

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \quad , \quad p(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

در واقع فضای نمونه را محدود به مجموعهٔ A کرده ایم یعنی $p(B|A) = p(B|_A)$



(نمودار ون مقابل را ببینید). مسلم است که پیشامد B مستقل از A است اگر $p(B|A) = p(B)$ بنابراین تعریف استقلال پیشامدها در مطلب ۱.۲.۳ صحیح است.

مثال ۱.۳.۳ در مثال۵.۲.۳ اگر بدانیم که شمارهٔ کارت خارج شده فرد است، احتمال آنکه بر ۵ بخش پذیر باشد چیست؟

حل. در این حالت فضای نمونه محدود به اعداد فرد می شود پس $p(B|A) = \frac{n(A\cap B)}{n(A)} = \frac{۵}{۲۵}$

مثال ۲.۳.۳ از کیسه ای حاوی ۳ مهرهٔ سبز و ۲ مهرهٔ آبی، ۲ مهره به ترتیب و به تصادف خارج می کنیم. اگر بدانیم مهرهٔ اول آبی بوده احتمال اینکه مهرهٔ دوم سبز باشد چیست؟

حل. اگر پیشامد آبی بودن مهرهٔ اول را A و پیشامد سبز بودن مهرهٔ دوم را B فرض کنیم. داریم:

$$p(A) = \frac{۲}{۵} \quad , \quad p(A \cap B) = \frac{۲}{۵} \times \frac{۳}{۴} \quad , \quad p(B|A) = \frac{\frac{۶}{۲۰}}{\frac{۲}{۵}} = \frac{۳}{۴}$$

مطلب ۱.۳.۳ با استفاده از فرمول احتمال شرطی و با جابجا کردن A و B می توان نوشت:

$$p(A \cap B) = p(A)p(B|A) = p(B)p(A|B)$$

و این نتیجه می دهد که

$$p(B) = \frac{p(A)p(B|A)}{p(A|B)} \quad (**) \quad , \quad p(A|B) = \frac{p(A)p(B|A)}{p(B)} \quad (*)$$

ریاضیدان انگلیسی توماس بیز[۷](۱۷۶۱—۱۷۰۲) در مقاله ای که در ۱۷۶۳ انتشار داد مباحث مهمی از احتمالات را عنوان نمود. این قاعده که تعمیمی از قانون احتمال شرطی است و آنرا قضیهٔ احتمال علتها هم نامند، بسیار مورد استفاده قرار می گیرد.

تعریف ۱.۳.۳ (بیز) فرض کنید S یک فضای نمونه و $A_۱, A_۲, \cdots, A_n$ پیشامدهائی دوبدو مجزا ($A_i \cap A_j = \phi$) در S بوده و علت پیشامد دیگری مانند B باشند. احتمال پیشامد B در این حالت بصورت زیر خواهد بود:

$$p(B) = p(B|A_۱)p(A_۱) + p(B|A_۲)p(A_۲) + \cdots + p(B|A_n)p(A_n) \implies p(B) = \sum_{i=۱}^{n} p(B|A_i)p(A_i)$$

و با فرمول $(*)$ بالا

$$p(A_i|B) = \frac{p(B|A_i)p(A_i)}{\sum_{i=۱}^{n} p(B|A_i)p(A_i)}$$

مثال ۳.۳.۳ سه ظرف داریم ظرف اول محتوی دو مهره سفید و ۳ مهره قرمز و ظرف دوم حاوی یک مهره سفید و دو مهره قرمز و ظرف سوم حاوی یک مهره قرمز و دو مهره سفید است. یک مهره از ظرف به تصادف انتخاب می کنیم. (الف) احتمال اینکه مهره سفید باشد چقدر است؟ (ب) اگر مهره سفید باشد احتمال اینکه از ظرف دوم بیرون آمده باشد چقدر است؟

حل. فرض کنید ظرفها بترتیب $A_۱$ و $A_۲$ و $A_۳$ باشند. مهرهٔ سفید را با B نشان می دهیم. (الف) طبق قاعده بیز

$$p(B) = p(B|A_۱)p(A_۱) + p(B|A_۲)p(A_۲) + p(B|A_۳)p(A_۳) = \frac{۲}{۵} \times \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۷}{۱۵}$$

و برای قسمت (ب) از فرمول $(*)$ استفاده می کنیم:

$$p(A_۲|B) = \frac{p(A_۲)p(B|A_۲)}{p(B)} = \frac{\frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳}}{\frac{۷}{۱۵}} = \frac{۵}{۲۱}$$

تمرین ۱.۳.۳ کلاسی. در یک شرکت کامپیوتری دو تایپیست کار می کنند تایپیست A مقدار ۳۰۰ صفحه در روز و تایپیست B مقدار ۲۰۰ صفحه در روز تایپ می کنند. خطای تایپیست A برابر ۵ درصد خطای تایپیست B برابر ۶ درصد است. اگر در روز به آنها ۵۰۰ صفحه برای تایپ بدهیم احتمال آنکه یک صفحه اشتباه تایپ کنند چقدر است؟

[۷] Bayes, Thomas

تمرین ۲.۳.۳ منزل.

۱) برای دو پیشامد A و B در فضای نمونه S ثابت کنید:

$$(a)\ \ p(A-B)=p(A)-p(A\cap B)\quad,\quad (b)\ \ p(A\cup B)\leq p(A)+p(B)$$

۲) در فضای احتمال S اگر برای دو پیشامد A و B داشته باشیم

$$p(A')=\frac{5}{8}\ \ ,\ \ p(B)=\frac{1}{2}\ \ ,\ \ p(A\cup B)=\frac{3}{4}$$

مطلوبست محاسبهٔ مقادیر

$$(a)\ \ p(A'\cap B')\ \ ,\ \ (b)\ \ p(A\cap B)\ \ ,\ \ (c)\ \ p(A'\cup B')\ \ ,\ \ (d)\ \ p(B\cap A')$$

۳) دوتاس را پرتاب می کنیم احتمال آنکه مجموع اعداد بدست آمده از ۴ بیشتر باشد چیست؟

۴) در بین یک مسابقهٔ سه نفری نتایج چنین می شود که احتمال برد A چهار برابر احتمال برد B و احتمال برد C سه برابر احتمال برد B است. (آ) احتمال برد هر فرد را بیابید. (ب) احتمال برد A یا C چقدر است؟

۵) ۴۰ درصد مشتریان یک فروشگاه ماست سفارش می دهند و ۳۰ درصد آنها پنیر و ۱۰ درصد هر دو، احتمال آنکه یک مشتری حداقل یک از آنها را سفارش دهد چیست؟

۶) دو تلفنچی A و B بترتیب ۳۵ درصد و ٦۵ درصد تلفنهای یک شرکت را به اتاق ها وصل می کنند. تلفنچی A در کل روز ۳ درصد اشتباه و تلفنچی B در کل روز ۵ درصد اشتباه دارد. احتمال اینکه یک تلفن در طول روز اشتباه وصل شود چقدر است؟ تلفنی اشتباه وصل شده احتمال اینکه از تلفنچی B باشد چقدر است؟

۷) کیسه ای شامل ۱۲ مهرهٔ سفید و ۸ مهرهٔ سیاه است. دو مهره بترتیب بیرون می آوریم بدون توجه به رنگ آنها مهرهٔ سومی بیرون می آوریم. احتمال آنکه مهرهٔ سوم سفید باشد چقدر است؟

۸) از بین اعداد ۱ تا ۹۹۹ یک عدد انتخاب می کنیم احتمال آنکه این عدد بر ۴ یا ۵ قابل قسمت باشد چیست؟

۹) در یک دانشگاه دانشجویان دختر ۴۵ درصد و پسر ۵۵ درصد را تشکیل می دهند. ۱۰ درصد دانشجویان پسر و ۵ درصد دانشجویان دختر درس آمار را گرفته‌اند. دانشجوئی را به تصادف انتخاب می کنیم و می بینیم درس آمار گرفته است. احتمال اینکه این دانشجو پسر باشد چقدر است؟

۱۰) در یک خانوادهٔ سه فرزندی احتمال اینکه فرزند اول و آخر دختر باشد چقدر است؟

فصل ۴

متغیرهای تصادفی

۱.۴ تعاریف

در بخش ۴.۱.۱ تفاوت نمونه و جامعه را بیان نمودیم و طی فصل اول نمونه را کاملاً بررسی و تحلیل کرده و پارامترهای مختلفی را روی آن سنجیدیم. از آنجا که نمونه ها را می بایست با جوامع تقریب زد، برای نزدیک کردن نمونه ها با جوامع می بایست جامعه را نیز تحلیل نموده و مدلهای مختلف جامعه را روی نمونه پیاده نمائیم. در ادامه، این مدلها را بررسی کرده و مطابق با پارامترهای نمونه، پارامترهای زیر را برای جامعه در نظر می گیریم.

پارامتر	نمونه	جامعه
تعداد	n	N
میانگین	$\bar{x}$	μ
واریانس	S_x^2	σ_x^2
انحراف معیار	S_x	σ_x

۱.۱.۴ فضای احتمال

اگر X یک پیشامد تصادفی دلخواه در S باشد، چون X بجای هر پیشامد در S می تواند قرار بگیرد آنرا **متغیر تصادفی** نامیده و کلیهٔ پیشامدهای مرتبط با X تشکیل یک **فضای پیشامد** یا **فضای احتمال** می دهند. فضای احتمال ممکن است محدود $S=\{X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n\}$ یا نامحدود $S=\{X_1, X_2, X_3, \cdots\}$ باشد، این مدل فضای نمونه که **فضای نمونهٔ گسسته** نامیده می شود، را با جدول زیر نشان می دهیم:

X	X_1	X_2	$\cdots$	X_n
$P(X)$	$p(X_1)$	$p(X_2)$	$\cdots$	$p(X_n)$

که $p(X_i)$ احتمال کمیت X_i است. مشخصات فضای احتمال گسسته چنین است:

الف) بازاء هر X_i داریم $p(X_i) \geq 0$.

ب) همواره $\sum_{X_i \in X} p(X_i) = 1$.

مثال ۱.۱.۴ در ریختن یک تاس فضای نمونهٔ S یعنی کلیهٔ پیشامدهای ممکن بصورت زیر بوده و تشکیل یک فضای احتمال می دهند:

X	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$P(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\Rightarrow \quad p(X_i) \geq 0 \quad , \quad \sum_{X_i \in X} p(X_i) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} = 1$$

و فضای احتمال در پرتاب یک سکه چنین است:

X	H	T
$p(X)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

مثال ۲.۱.۴ در مثال ۴.۲.۳ فضای نمونه را برای مجموع اعداد روی دو تاس دیدم. فضای پیشامد آنرا چنین می نویسیم:

X	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
$p(X)$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۶}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$

تابع احتمال یا تابع توزیع را چنین تعریف می کنیم:

$$f(x_i) = P(X = x_i)$$

بنابراین همان ویژگیهای توزیع گسسته را دارد یعنی بازاء هر x_i داریم $f(x_i) \geq ۰$ و بعلاوه $\sum_{x_i \in X} f(x_i) = ۱$. در مثال فوق احتمال آمدن عدد ۴ برابر است با $f(۴) = P(X = ۴) = \frac{۳}{۳۶}$.

۲.۱.۴ امید ریاضی

امید ریاضی E تابعی دلخواه مانند $g(x)$ را برای توزیع گسستهٔ $f(x)$ بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$E(g) = \sum_X g(x) f(x)$$

برای مثال اگر بجای g توابع X و یا $X^۲$ و یا $۲X + ۳$ قرار دهیم، می نویسم:

$$E(X) = \sum_{i=۱}^{n} x_i f(x_i) \quad , \quad E(X^۲) = \sum_{i=۱}^{n} x_i^۲ f(x_i) \quad , \quad E(X) = \sum_{i=۱}^{n} (۲x_i + ۳) f(x_i)$$

حال تعریف می کنیم $\mu(x) = E(X)$ و $\sigma(X) = E(X^۲) - E^۲(X)$ که میانگین و انحراف معیار را برای توزیع بدست می دهد. برای مثال ۱.۱.۴ داریم:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=۱}^{n} x_i f(x_i) = ۱ \times \frac{۱}{۶} + ۲ \times \frac{۱}{۶} + ۳ \times \frac{۱}{۶} + ۴ \times \frac{۱}{۶} + ۵ \times \frac{۱}{۶} + ۶ \times \frac{۱}{۶} = ۳/۵$$

$$E(X^۲) = \sum_{i=۱}^{n} x_i^۲ f(x_i) = ۱^۲ \times \frac{۱}{۶} + ۲^۲ \times \frac{۱}{۶} + ۳^۲ \times \frac{۱}{۶} + ۴^۲ \times \frac{۱}{۶} + ۵^۲ \times \frac{۱}{۶} + ۶^۲ \times \frac{۱}{۶} = ۱۵/۱۶$$

و واریانس برابر است با $\sigma(X) = E(X^۲) - E^۲(X) = ۲/۹۱$.

مثال ۳.۱.۴ برای مثال ۲.۱.۴ مقدار میانگین و انحراف معیار را بیابید.

$$\mu = E(X) = \sum_{i=۱}^{n} x_i f(x_i) = ۲\frac{۱}{۳۶} + ۳\frac{۲}{۳۶} + ۴\frac{۳}{۳۶} + ۵\frac{۴}{۳۶} + ۶\frac{۵}{۳۶} + ۷\frac{۶}{۳۶} + ۸\frac{۵}{۳۶} + ۹\frac{۴}{۳۶} + ۱۰\frac{۳}{۳۶} + ۱۱\frac{۲}{۳۶} + ۱۲\frac{۱}{۳۶} = ۷$$

$$E(X^۲) = \sum_{i=۱}^{n} x_i^۲ f(x_i) = ۲^۲\frac{۱}{۳۶} + ۳^۲\frac{۲}{۳۶} + \cdots + ۱۱^۲\frac{۲}{۳۶} + ۱۲^۲\frac{۱}{۳۶} = ۵۴/۸۳ \Longrightarrow \sigma_x = E(X^۲) - E^۲(X) = ۵/۸۳$$

تمرین ۱.۱.۴ کلاسی. سکه چنان ساخته شده که احتمال شیر آمدن آن $\frac{۱}{۳}$ است. این سکه را سه بار می‌اندازیم. فضای احتمال شیر آمدن آنرا یافته و امید ریاضی آنرا بنویسید. مقدار میانگین و انحراف معیار را بیابید.

مثال ۴.۱.۴ ۵ لامپ در اختیار داریم که دوتای آنها معیوب هستند. از این لامپ ها دو لامپ جدا می کنیم. اگر X متغیر معیوب بودن لامپها باشد، با رسم جدول پیشامد ها مقادیر $P(X<۲)$ و $P(-۳<X\leq ۰)$ را تعیین نمائید.

حل. فضای نمونه و برداشتن لامپ ها طبق نمودار درختی یا روشهای دیگر مشخص می کند که:

X	۰	۱	۲
$p(X)$	$\frac{۱}{۱۰}$	$\frac{۶}{۱۰}$	$\frac{۳}{۱۰}$

$$P(X<۲)=P(X=۰)+P(X=۱)=\frac{۷}{۱۰} \quad , \quad P(-۳<X\leq ۰)=P(X=۰)=\frac{۱}{۱۰}$$

۳.۱.۴ تابع توزیع پیوسته

تابع توزیع (یا تابع چگالی احتمال) $f(x)$، تابع توزیع تجمعی $F(x)$ و تابع توزیع پیوسته $\hat{f}(x)$ مثال بالا بصورت زیر هستند.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{۱}{۱۰} & , \ x=۰, \\ \frac{۶}{۱۰} & , \ x=۱, \\ \frac{۳}{۱۰} & , \ x=۲. \end{cases} \implies F(x)=\begin{cases} \frac{۱}{۱۰} & , \ x=۰, \\ \frac{۷}{۱۰} & , \ x=۱, \\ ۱ & , \ x=۲. \end{cases} \implies \hat{f}(x)=\begin{cases} ۰ & , \ x<۰, \\ \frac{۶}{۱۰} & , \ ۰\leq x<۱, \\ \frac{۳}{۱۰} & , \ ۱\leq x<۲, \\ \frac{۳}{۱۰} & , \ x\geq ۲. \end{cases}$$

مطلب ۱.۱.۴ ویژگیهای تابع توزیع پیوسته $\hat{f}(x)$ و تابع توزیع تجمعی $F(x)$ وقتی که $-\infty<x<+\infty$ بصورت زیر است:

الف) بازاء هر x_i داریم $۰\leq \hat{f}(x_i)\leq ۱$.

ب) همواره $\int_{x_i\in X}\hat{f}(x_i)=۱$.

ج) داریم $۰\leq F(x)\leq ۱$.

د) تابع توزیع تجمعی همواره صعودی است: $x_۱<x_۲\Rightarrow F(x_۱)\leq F(x_۲)$

هـ) F از راست همیشه پیوسته است و $F(+\infty)=۱$ و $F(-\infty)=۰$

و) تعریف می کنیم:

$$P(a<X\leq b)=F(b)-F(a)=\int_a^b \hat{f}(x)dx$$

بعلاوه احتمالات زیر را داریم:

$$\begin{aligned} P(a<X<b) &= F(b^-)-F(a) \\ P(a\leq X\leq b) &= F(b)-F(a^-) \\ P(a\leq X<b) &= F(b^-)-F(a^-) \\ P(X<b) &= F(b^-) \\ P(X>a) &= ۱-F(a) \end{aligned}$$

مثال ۵.۱.۴ در مثال ۷.۲.۳ مطلوبست تابع توزیع X که احتمال مهرهٔ سبز است؟

حل. فضای نمونه آنچنانکه در مثال۷.۲.۳ و برداشتن مهره آبی طبق نمودار درختی یا روشهای دیگر مشخص می کند که:

X	0	1	2
$p(X)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

تابع توزیع، تابع توزیع تجمعی و تابع توزیع پیوسته بصورت زیر هستند.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{7} & , \quad x=0,\\ \frac{4}{7} & , \quad x=1,\\ \frac{2}{7} & , \quad x=2.\end{cases} \Longrightarrow F(x)=\begin{cases}\frac{1}{7} & , \quad x=0,\\ \frac{5}{7} & , \quad x=1,\\ 1 & , \quad x=2.\end{cases} \Longrightarrow \hat{f}(x)=\begin{cases}0 & , \quad x<0,\\ \frac{1}{7} & , \quad 0\le x<1,\\ \frac{4}{7} & , \quad 1\le x<2,\\ \frac{2}{7} & , \quad x\ge 2.\end{cases}$$

مثال ۶.۱.۴ تابع چگالی احتمال متغیری تصادفی برابر $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4\sqrt{x}} & 1\le x\le 9,\\ 0 & Others.\end{cases}$ است، مطلوبست مقدار

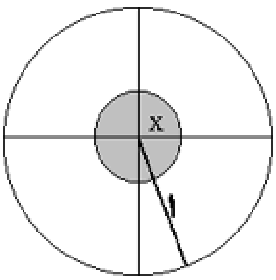
$$P(\frac{9}{4}\le X\le 4)$$

حل. داریم:

$$P(\frac{9}{4}\le X\le 4)=\int_{\frac{9}{4}}^{4}(\frac{1}{4\sqrt{x}})dx=\frac{\sqrt{x}}{2}\Big|_{\frac{9}{4}}^{4}=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

تمرین ۲.۱.۴ کلاسی. در پرتاب ۲ سکه فضای احتمال رو آمدن را بیابید؟ تابع توزیع، تابع توزیع تجمعی و تابع توزیع پیوسته را بنویسید.

مثال ۷.۱.۴ نقطه ای به تصادف درون دایره ای به مرکز مبداء و شعاع ۲ انتخاب می کنیم.



فاصلهٔ نقطه تا مرکز را x می گیریم.

(الف) احتمال اینکه نقطه فاصله اش تا مرکز حداکثر x باشد.

(ب) احتمال اینکه فاصلهٔ نقطه تا مرکز حداقل $\frac{1}{3}$ و حداکثر $\frac{1}{2}$ باشد چیست؟

حل. مساحت دایرهٔ بزرگتر $S=4\pi$ و مساحت دایرهٔ کوچکتر برابر $E=\pi x^2$ پس

$P=\frac{E}{S}=\frac{\pi x^2}{4\pi}=\frac{1}{4}x^2$ و تابع توزیع تجمعی پیوسته بصورت زیر است

$$F(x)=\begin{cases}0 & , \quad x<0,\\ \frac{1}{4}x^2 & , \quad 0\le x<2,\\ 1 & , \quad x\ge 2.\end{cases}$$

هر چند تابع توزیع این متغیر بروش معمول حاصل نشد اما با مشتق گیری داریم:

$$f(x)=\begin{cases}0 & , \quad x<0,\\ \frac{x}{2} & , \quad 0\le x<2,\\ 0 & , \quad x\ge 2.\end{cases} \Longrightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & 0\le x\le 2,\\ 0 & , \quad Other.\end{cases}$$

چون $\int_0^2 \frac{x}{2}dx=1$ پس f تابع توزیع بوده و نیز داریم

$$P(\frac{1}{3}\le X\le \frac{1}{2})=F(\frac{1}{2})-F(\frac{1}{3})=\frac{1}{4}(\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}(\frac{1}{3})^2=\frac{5}{144}$$

مطلب ۲.۱.۴ از آنجا که امید ریاضی برای توزیع گسسته بصورت $E(g) = \sum_X g(x)f(x)$ تعریف می شود، برای توزیع پیوسته چنین خواهد بود:

$$E(g) = \int_X g(x)f(x)$$

مثال ۸.۱.۴ اگر X دارای چگالی احتمال زیر باشد μ و σ و امید $g(x) = \sqrt{x}$ را بیابید:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{۲} & ۰ \leq x \leq ۲, \\ ۰ & , \quad Other. \end{cases}$$

حل. بنابر توزیع گسسته $\mu(x) = E(X)$ و $\sigma(X) = E(X^۲) - E^۲(X)$ پس

$$\mu(x) = E(X) = \int xf(x)dx = \int_۰^۲ x.\frac{x}{۲}dx = \frac{x^۳}{۶}|_۰^۲ = \frac{۸}{۶}$$

$$E(X^۲) = \int x^۲ f(x)dx = \int_۰^۲ x^۲.\frac{x}{۲}dx = \frac{x^۴}{۸}|_۰^۲ = ۲$$

$$\sigma(X) = E(X^۲) - E^۲(X) = ۲ - (\frac{۸}{۶})^۲ = \frac{۲}{۹}$$

$$E(g) = \int_X g(x)f(x) = \int \sqrt{x}f(x)dx = \int_۰^۲ \sqrt{x}.\frac{x}{۲}dx = \frac{۱}{۵}\sqrt{x^۵}|_۰^۲ = \frac{\sqrt{۳۲}}{۵}$$

تمرین ۳.۱.۴ منزل.

۱) فضای احتمال شیر آمدن در پرتاب سه سکه چیست؟

۲) بررسی نمائید که فضای زیر یک فضای احتمال است:

X	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$P(X)$	$\frac{۱}{۲۰}$	$\frac{۸}{۲۰}$	$\frac{۳}{۲۰}$	$\frac{۲}{۲۰}$	$\frac{۴}{۲۰}$	$\frac{۲}{۲۰}$

اکنون مقدار عبارات زیر را بیابید:

$$E(X) \quad , \quad E(۳X) \quad , \quad E(۲X-۱) \quad , \quad E(X^۲) \quad , \quad E((۲X+۱)^۲) \quad , \quad \mu(X) \quad , \quad \sigma(X) \quad , \quad Var(X)$$

۳) اگر متغیر X دارای توزیع زیر باشد

X	۲	۳	۴	۵
$p(X)$	۰/۴	۰/۱	۰/۲	۰/۳

مطلوبست σ و μ–ی این توزیع.

۴) سه شیء از جعبه ای شامل ۱۰ شیء که ۳ تای آنها ناقص است بر حسب تصادف انتخاب می کنیم. مطلوبست محاسبه امید ریاضی از اشیاء ناقص.

۵) تابع توزیع پیوسته و تابع توزیع تجمعی تمرین ۳ بالا را نوشته و مقادیر زیر را معین نمائید:

$$P(2 \leq X \leq 4) \quad , \quad P(1 \leq X \leq 2)$$

$$P(X \geq \frac{4}{3}) \quad , \quad P(X \leq 3)$$

۶) تابع چگالی احتمال متغیری تصادفی بصورت $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & Others. \end{cases}$ است، مطلوبست مقدار

$$P(\frac{1}{4} \leq X \leq 1) \quad , \quad P(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{2}{3})$$

۷) تابع چگالی احتمال متغیری تصادفی برابر $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}sinx & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0 & Others. \end{cases}$ است، مطلوبست مقدار

$$P(0 \leq X \leq \frac{\pi}{2}) \quad , \quad P(X \leq \frac{\pi}{4}) \quad , \quad P(X \geq \frac{3\pi}{4})$$

۸) اگر X دارای چگالی احتمال زیر باشد μ و σ و امید $g(x) = x^2$ را بیابید:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & , \ Other. \end{cases}$$

۹) اگر X دارای چگالی احتمال زیر باشد

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2}x^4 & -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & , \ Other. \end{cases}$$

مقادیر μ و σ و را یافته و امید توابع زیر را بیابید:

$$\sqrt{x} \quad , \quad x^2 \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \quad , \quad \frac{1}{x^4}$$

۱۰) اگر متغیر تصادفی گسستهٔ X دارای تابع احتمال $f(x) = \begin{cases} 3(\frac{1}{4})^x & , \ x = 1, 2, \cdots, \\ 0 & , \ else. \end{cases}$ باشد. مطلوبست احتمال زوج بودن X.

فصل ۵

توزیع ها

۱.۵ انواع توزیع

در ذیل به چند توزیع خاص در باب متغیر تصادفی X می پردازیم. قابل ذکر است که $C_k^n = \binom{n}{k}$

۲.۵ چند توزیع خاص

۱.۲.۵ توزیع یکنواخت $V[a,b]$

اگر بطور تصادفی نقطه ای را از فاصلهٔ $[a,b)$ انتخاب کینم، این متغیر تصادفی X داری تابع چگالی ثابت بوده، توزیع را **توزیع یکنواخت** گوئیم و می نویسیم $X \sim V[a,b]$. برای این توزیع پیوسته $D_f = [a,b)$ و برد توزیع، یک عدد ثابت بوده و داریم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \quad a \leq x < b, \\ 0 & , \quad else. \end{cases}$$

برای این توزیع پیوسته $\mu = \frac{a+b}{2}$ و $\sigma_x^2 = \frac{1}{12}(b-a)^2$.

مثال ۱.۲.۵ یک نقطه به تصادف از فاصلهٔ $[1,3]$ انتخاب می کنیم، احتمال آنکه این نقطه بین ۱/۵ و ۲/۲۵ باشد چیست؟

حل. اگر X نقطهٔ انتخابی باشد، چون $X \sim V[1,3]$ بنابراین

$$f(x) = \{^{\frac{1}{2}}_{0} \quad ^{,}_{,} \quad ^{1 \leq x \leq 3}_{else}$$

بنابراین

$$P(1/5 \leq x \leq 2/25) = \int_{1/5}^{2/25} \frac{1}{2} dx = 0/375$$

۲.۲.۵ توزیع برنولی

فرض کنید در آزمایشی تصادفی، احتمال وقوع پیشامد X (پیروزی) برابر p باشد، در اینصورت احتمال واقع نشدن (شکست) آن $q = 1 - p$ خواهد بود. بنابراین $P(X = 1) = p$ و $P(X = 0) = 1 - p$ و این متغیر X را متغیر برنولی و این توزیع گسسته

را **توزیع برنولی** نامیم. چگالی این توزیع بصورت زیر خواهد بود:

$$f(x)=\begin{cases} p & , \quad x=1 \\ q & , \quad x=0 \\ 0 & , \quad else. \end{cases}$$

کمیت p را پارامتر توزیع برنولی نامیده و مسلماً داریم $\Sigma_{x=0}^{1} f(x)=f(0)+f(1)=p+q=1$ و $\mu=p$ و $\sigma_x^2=pq$. برد متغیر برنولی $R_f=\{0,1\}$ بوده و این توزیع برای آزمایشی بکار می رود که نتیجهٔ آن بله و خیر است.

۳.۲.۵ توزیع دوجمله‌ای $B(n,p)$

اگر یک آزمایش برنولی بطور مستقل n بار تکرار شود، تعداد آزمایشات بازای هر پیروزی p و شکست q بطورکلی برابر 2^n آزمایش خواهد بود. در اینحالت X را **متغیری دو جمله‌ای** $X \sim B(n,p)$ نامیده و این توزیع گسسته را **توزیع دوجمله‌ای** با پارامترهای n و p نامیده و چگالی آن بصورت زیر خواهد بود:

$$f(x;n,p)=\begin{cases} C_x^n p^x (1-p)^{n-x} & , \quad x=0,1,\cdots,n \\ 0 & , \quad else. \end{cases}$$

زیرا برای این n بار آزمایش برنولی احتمال رخ دادن پیشامد $X=x$ و یا موفقیت x بار برابر C_x^n بوده و احتمال آن $C_x^n p^x q^{n-x}$ است.

طبق بسط خیام–نیوتن داریم $\Sigma_{x=0}^{n} C_x^n p^x q^{n-x}=1$ لذا توزیع خوش تعریف بوده و برای این توزیع $\mu=pq$ و $\sigma_x^2=npq$.

مثال ۲.۲.۵ سکهٔ ناارییی را ۶ بار پرتاب می کنیم. احتمال اینکه سه بار شیر بیاید، چیست؟

حل. اگر X متغیر تصادفی برای پیشامد شیر باشد پس $X \sim B(6,\frac{1}{2})$ بنابراین

$$P(X=3)=f(3;6,\frac{1}{2})=C_3^6(\frac{1}{2})^3(1-\frac{1}{2})^{6-3}=20\times(\frac{1}{2})^6=\frac{20}{64}$$

تمرین ۱.۲.۵ احتمال تولد پسر یا دختر در خانواده ای $\frac{1}{2}$ است. در خانوادهٔ ۵ فرزندی احتمال داشتن ۲ پسر چقدر است؟

حل. چون $X \sim B(5,\frac{1}{2})$ لذا

$$P(x=2)=f(2,5;\frac{1}{2})=C_2^5(\frac{1}{2})^2(1-\frac{1}{2})^3=\frac{15}{32}$$

مثال ۳.۲.۵ در آزمونی ۱۰ تستی و چهارجوابی، احتمال اینکه بطور شانسی به حداکثر ۳ تست جواب صحیح بدهیم چیست؟

حل. اگر X متغیر تصادفی برای پیشامد جواب دادن صحیح به تست ها باشد پس $X \sim B(10,\frac{1}{4})$ و

$$P(X\le 3)=\sum_{x=0}^{3} f(x;10,\frac{1}{4})=\sum_{x=0}^{3} C_x^{10}(\frac{1}{4})^x(\frac{3}{4})^{10-x}=0/776$$

تمرین ۲.۲.۵ منزل.

۱) سکه‌ای چنان ساخته شده که احتمال شیر آمدن آن $\frac{۱}{۴}$ است. احتمال اینکه در ۴ بار پرتاب ۳ بار شیر بنشیند چیست؟

۲) یک تیم فوتبال در هر بازی احتمال بردی برابر $\frac{۲}{۳}$ دارد. این تیم ۴ بار بازی می کند احتمال اینکه این تیم (الف) درست دو بار ببرد. (ب) حداقل یکبار ببرد؟ (ج) بیش از نصف بازیها برنده شود.

۳) احتمال موفقیت یک تیرانداز ۶۵٪ است. این شخص ۴ بار بطرف هدفی تیراندازی می کند احتمال اینکه حداقل دو بار به هدف بزند چقدر است؟

۴.۲.۵ توزیع پواسن $P(\lambda)$

این توزیع با پارامتر λ بصورت زیر تعریف می شود:

$$f(x;\lambda)=\begin{cases} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} & , \quad x=۰,۱,\cdots \\ ۰ & , \quad else. \end{cases}$$

این توزیعی گسسته مرتبط با توزیع دوجمله‌ای بوده و در حالتیکه $n\to\infty$ تابع دوجمله‌ای به تابع پواسن با پارامتر λ تبدیل می شود. این توزیع که توزیعی نامحدود ولی شماراست در اکثر پدیده های طبیعی مثل مقدار مکالمات تلفنی، غلطهای چاپی در هر صفحه کتابی بزرگ، عدهٔ ذرات α منتشر شده از یک ماده رادیواکتیویته استفاده می شود. در این توزیع $\mu=\sigma^۲=\lambda$ است.

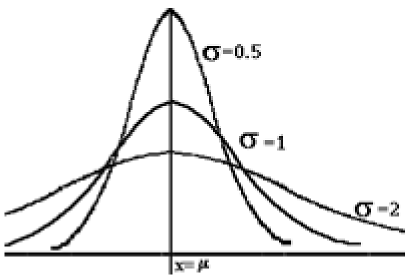
مثال ۴.۲.۵ به یک مرکز تلفن بطور متوسط ۴۰ تلفن در فاصلهٔ ۹ تا ۱۰ صبح می شود. احتمال اینکه در ۹ دقیقه اول حداقل ۵ تلفن به این مرکز شود چقدر است؟

حل. اگر X متغیر تصادفی برای پیشامد جواب دادن به تلفنها باشد چون $\lambda=\frac{۴۰\times۹}{۶۰}=۶$ پس $X\sim P(۶)$ بنابراین

$$P(X\geq ۵)=۱-P(X\leq ۴)=۱-\sum_{x=۰}^{۴}e^{-۶}\frac{۶^x}{x!}=۰/۷۳۷$$

۵.۲.۵ توزیع نرمال $N(\mu,\sigma^۲)$

توزیع نرمال (هنجار) یا توزیع گاوس از مهمترین توزیع های احتمال پیوسته بوده و دارای تابع چگالی احتمال بصورت زیر است:

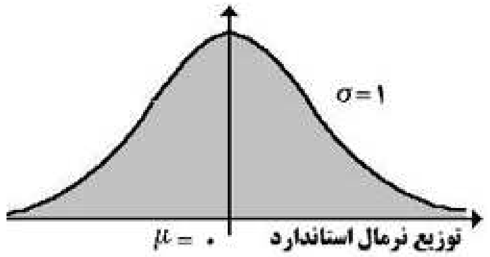


$$f(x)=\frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^۲}{۲\sigma^۲}} \qquad \sigma>۰\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

این توزیع نسبت به خط $x=\mu$ متقارن بوده و دارای شکل زنگوله‌ای بدینصورت است.

آنرا منحنی فراوانی نرمال با پارامترهای μ (میانگین) و $\sigma^۲$ (پراش) و متغیر مربوطه را متغیر نرمال می نامند. منحنی نسبت به خط $x=\mu$ متقارن دارای ماکزیمم در نقطه $(\mu,\frac{۱}{\sqrt{۲\pi\sigma^۲}})$ مجانب با محور x و زنگ–گونه می باشد. کلمه نرمال یعنی طبیعی و عادی است و علت نامگذاری آن این که اغلب پدیده های فیزیکی و طبیعی دارای توزیع نرمال بوده مثل خطاهای اندازه گیری از طرفی برخی توزیع های دیگر نیز برای n های بزرگ به توزیع نرمال گرایش دارند.

از آنجائیکه مساحت زیر چگالی همواره ثابت بوده و برابر ۱ است، هرچه σ بزرگتر باشد نمودار پهن تر است یعنی σ میزان پراکندگی داده های را مشخص می کند. هر چه $\sigma^{۲}$ کوچکتر باشد منحنی کشیده تر بوده و قسمت اعظم مساحت زیر منحنی اطراف $x = \mu$ توزیع می شود. نقاط $x = \mu \pm \sigma$ نقاط عطف تابع هستند. منحنی زنگوله ای یا منحنی نرمال، از مشهورترین منحنی های آماری است.

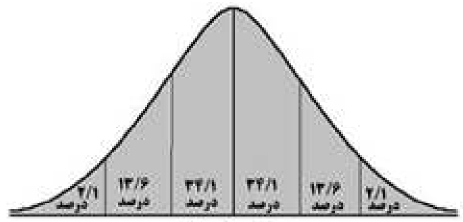


مقیاس میزان پراکندگی منحنی نرمال در توزیع های طبیعی چنین است:

۶۸/۲۷ درصد در فاصله بین $(\bar{x} + \sigma$ و $\bar{x} - \sigma)$

۹۵/۴۵ درصد در فاصله بین $(\bar{x} + ۲\sigma$ و $\bar{x} - ۲\sigma)$

۹۹/۷۳ درصد در فاصله بین $(\bar{x} + ۳\sigma$ و $\bar{x} - ۳\sigma)$



توزیع نرمال

اگر $\mu = ۰$ و $\sigma = ۱$ منحنی را منحنی نرمال استاندارد می نامند. در حالت خاص اگر در توزیع نرمال $\mu = ۰$ و $\sigma = ۱$ باشد به این توزیع، **توزیع نرمال استاندارد** گفته و معمولاً با $Z \sim N(۰, ۱)$ نشان می دهیم. مقادیر نرمال استاندارد در جدول ضمیمه ذکر شده است. اگر بخواهیم توزیع را نرمال کنیم: $X \sim N(۳/۵, ۴/۱)$. برای استفاده از جدول توزیع نرمال، ابتدا برای جامعهٔ نرمال $X \sim N(\mu, \sigma_x^{۲})$ را بدست آورده و سپس با تغییر متغیر $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ آنرا به جامعهٔ نرمال استاندارد $Z \sim N(۰, ۱)$ تبدیل و از جدول نرمال استاندارد مقادیر را بدست می آوریم. نرمال استاندارد $N(۰, ۱)$ چنین بیان می شود:

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} \qquad \phi(z) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{۱}{۲} z^{۲}}$$

طریقه استاندارد کردن داده ها طبق بخش ۷.۲.۱ بصورت $S_z = \frac{۱}{\sigma_x} S_x$ بوده و قابل ذکر است که در منحنی نرمال میانه و میانگین بر هم منطبق هستند. هرچند مقادیر مذکور فوق دقیقاً همه جا درست نیست، اما در این باره چبیشف یک نامساوی بدین ترتیب ارائه کرد که اگر $z \geq ۱$ باشد حداقل مشاهداتی که در فاصله $\mu \pm z\sigma$ قرار میگیرد برابر با $۱ - \frac{۱}{z^{۲}}$ می باشد.

مثال ۵.۲.۵ اگر $X \sim N(۰, ۱)$ مطلوبست $P(X \geq ۱)$ و $P(X < ۰)$ و $P(\frac{۱}{۲} \leq X \leq \frac{۳}{۲})$ و $P(X \geq ۱/۹۵)$.

مثال ۶.۲.۵ در یک نمونه گیری از افراد یک جامعه، نمونهٔ سن ۲۵ نفر از آنها دارای میانگین و واریانسی بترتیب برابر ۲۵ و ۱۰۰ می باشد. احتمال اینکه فردی از این جامعه

الف) دارای حداقل ۲۹ سال باشد چیست؟

ب) دارای حداکثر ۲۵ سال سن باشد چیست؟

ج) دارای حداقل ۲۲/۵ سال سن باشد چیست؟

د) دارای سنی بین ۲۳ و ۲۶ سال سن باشد چیست؟

۶.۲.۵ توزیع چند جمله ای

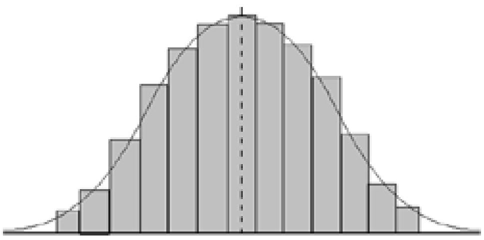
فرض کنید در یک فضای نمونه تجربه ای به n پیشامد $A_۱, A_۲, \cdots, A_n$ افراز شده است و احتمال این پیشامد ها $p_۱, p_۲, \cdots, p_n$ باشد که $p_۱ + p_۲ + \cdots + p_n = ۱$ اگر آزمایش m بار تکرار شود احتمال اینکه $A_۱, A_۲, \cdots, A_n$ بترتیب $k_۱, k_۲, \cdots, k_n$ بار بوقوع بپیوندند برابر است با

$$\frac{m!}{k_۱!k_۲!\cdots k_n!}p_۱^{k_۱}p_۲^{k_۲}\cdots p_n^{k_n}$$

که $k_۱ + k_۲ + \cdots + k_n = m$

مثال ۷.۲.۵ مکعب همگنی را ۸ بار می ریزیم احتمال اینکه عددهای ۵ و ٦ هر کدام و سایر عددها هر کدام یکبار بنشینند عبارتست از

$$\frac{۸!}{۲!\times ۲!\times ۱!\times ۱!\times ۱!\times ۱!}(\frac{۱}{٦})^۲(\frac{۱}{٦})^۲(\frac{۱}{٦})(\frac{۱}{٦})(\frac{۱}{٦})(\frac{۱}{٦}) = \frac{۳۵}{۵۸۳۲} = ۰/۰۰٦$$



۷.۲.۵ نتیجه تقریبی توزیع نرمال برای توزیع حد مرکزی

برای n های بزرگ توزیع دوجمله‌ای به توزیع نرمال نزدیک است.

$$z_n = \frac{X_۱ + X_۲ + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

برای ϕ نرمال استاندارد

$$\lim_{n\to\infty} P(a \le Z_n \le b) = P(a \le \Phi \le b)$$

که

$$\bar{S_n} = \frac{۱}{n}(X_۱ + X_۲ + \cdots + X_n)$$

با انکه توزیع پواسن کاربرد مستقلی دارد بازای مقادیر کوچک k بشرط آنکه p کوچک و $\lambda = np$ با تقریب بسیار نزدیکی توزیع دو جمله ای را مشخص می کند. پس برای p ی کوچک و n بزرگ که $\lambda = np$ باشد $B(k; n, p) \sim P(k; \lambda)$ خواهد بود.

مثال ۸.۲.۵ اگر یک کتاب ۲۵۰ صفحه ای دارای ۱۰۰ غلط باشد احتمال اینکه در یک صفحه مشخص دو غلط چاپی باشد چقدر است؟

حل. چون $p = \frac{۱}{۲۵۰}$ و $n = ۱۰۰$ بنابراین $\lambda = np = ۰/۴$ و

$$P(۰/۴) = p(۲, ۰/۴) = \frac{(۰/۴)^۲ e^{-۰/۴}}{۲!} = ۰/۰۵۴$$

تمرین ۳.۲.۵ منزل.

۱) یک نقطه به تصادف از فاصلهٔ $[\circ,\text{۱۰}]$ انتخاب می کنیم، احتمال آنکه این نقطه بین $-$۵ و ۵ باشد چیست؟

۲) نقطه ای را بطور تصادفی از فاصلهٔ $[-\text{۵},\text{۵})$ اختیار می کنیم. احتمال اینکه طول این نقطه عددی منفی یا از ۴ بیشتر باشد، چقدراست؟

۳) از کیسه ای حاوی ۴ مهرهٔ قرمز و ۵ مهرهٔ آبی ، ۳ مهره خارج می کنیم امید ریاضی مهره های آبی را حساب کنید.

۴) در ریختن ۲ تاس تابع توزیع احتمال را برای تفاضل اعداد روی آنها بنویسید و نمودار آنرا رسم کرده این چه تابع توزیعی است

۵) اگر $X \sim B(n,p)$ مطلوبست احتمالات زیر

$$f(\text{۲};\text{۵},\tfrac{\text{۱}}{\text{۴}}) \quad , \quad f(\text{۳};\text{۶},\tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}) \quad , \quad f(\text{۱};\text{۵},\tfrac{\text{۱}}{\text{۳}}) \quad , \quad f(\text{۲};\text{۶},\tfrac{\text{۱}}{\text{۹}})$$

۶) یک سکه ناریب را آنقدر پرتاب می کنیم تا بالاخره یک شیر یا ۵ خط بنشیند مطلوبست امید ریاضی تعداد دفعات ریختن این سکه.

۷) بازیکنی دو سکه سالم می ریزد، اگر هر دو سکه شیر بنشیند بازیکن ۵ تومان و اگر یک شیر بنشیند ۲ تومان و اگر هیچکدام نباشد یک تومان می برد مطلوبست امید برد.

۸) سکهٔ ناریبی را ۵ بار پرتاب می کنیم. احتمال اینکه حداکثر دو بار شیر بیاید، چیست؟

۹) احتمال تولد پسر یا دختر در خانواده ای $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ است. در خانوادهٔ ۴ فرزندی احتمال داشتن ۲ پسر و ۲ دختر چقدر است؟

۱۰) در آزمونی ۳۰ تستی و شش جوابی، احتمال اینکه بطور شانسی به حداکثر ۱۰ تست جواب صحیح بدهیم چیست؟

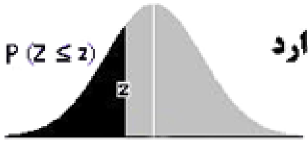
۱۱) اگر $X \sim N(\text{۲},\text{۴})$ مطلوبست $P(X \geq \frac{\text{۱}}{\text{۲}})$ و $P(X < \text{۲})$ و $P(\frac{\text{۱}}{\text{۲}} \leq X \leq \frac{\text{۵}}{\text{۲}})$ و $P(X \geq \circ/\text{۸۵})$.

۱۲) مکعب همگنی را ۶ بار می ریزیم. احتمال اینکه عددهای زوج هر کدام دو بار بنشینند چقدر است؟

۱۳) یک کتاب رمان ۵۰۰ صفحه‌ای دارای میانگین یک غلط در هر ۵ صفحه است. احتمال اینکه در حین مطالعهٔ کتاب قبل از صفحهٔ ۲۰۰ به ۵ غلط چاپی برخورد کنیم چقدر می باشد؟

جدول ضمیمهٔ مقادیر نرمال استاندارد با دو رقم اعشار ذکر گردیده است.

جدول نرمال استاندارد



—	۰/۰۰	۰/۰۱	۰/۰۲	۰/۰۳	۰/۰۴	۰/۰۵	۰/۰۶	۰/۰۷	۰/۰۸	۰/۰۹
۰/۰	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۴۰	۰/۵۰۸۰	۰/۵۱۲۰	۰/۵۱۶۰	۰/۵۱۹۹	۰/۵۲۳۹	۰/۵۲۷۹	۰/۵۳۱۹	۰/۵۳۵۹
۰/۱	۰/۵۳۹۸	۰/۵۴۳۸	۰/۵۴۷۸	۰/۵۵۱۷	۰/۵۵۵۷	۰/۵۵۹۶	۰/۵۶۳۶	۰/۵۶۷۵	۰/۵۷۱۴	۰/۵۷۵۳
۰/۲	۰/۵۷۹۳	۰/۵۸۳۲	۰/۵۸۷۱	۰/۵۹۱۰	۰/۵۹۴۸	۰/۵۹۸۷	۰/۶۰۲۶	۰/۶۰۶۴	۰/۶۱۰۳	۰/۶۱۴۱
۰/۳	۰/۶۱۷۹	۰/۶۲۱۷	۰/۶۲۵۵	۰/۶۲۹۳	۰/۶۳۳۱	۰/۶۳۶۸	۰/۶۴۰۶	۰/۶۴۴۳	۰/۶۴۸۰	۰/۶۵۱۷
۰/۴	۰/۶۵۵۴	۰/۶۵۹۱	۰/۶۶۲۸	۰/۶۶۶۴	۰/۶۷۰۰	۰/۶۷۳۶	۰/۶۷۷۲	۰/۶۸۰۸	۰/۶۸۴۴	۰/۶۸۷۹
۰/۵	۰/۶۹۱۵	۰/۶۹۵۰	۰/۶۹۸۵	۰/۷۰۱۹	۰/۷۰۵۴	۰/۷۰۸۸	۰/۷۱۲۳	۰/۷۱۵۷	۰/۷۱۹۰	۰/۷۲۲۴
۰/۶	۰/۷۲۵۷	۰/۷۲۹۱	۰/۷۳۲۴	۰/۷۳۵۷	۰/۷۳۸۹	۰/۷۴۲۲	۰/۷۴۵۴	۰/۷۴۸۶	۰/۷۵۱۷	۰/۷۵۴۹
۰/۷	۰/۷۵۸۰	۰/۷۶۱۱	۰/۷۶۴۲	۰/۷۶۷۳	۰/۷۷۰۴	۰/۷۷۳۴	۰/۷۷۶۴	۰/۷۷۹۴	۰/۷۸۲۳	۰/۷۸۵۲
۰/۸	۰/۷۸۸۱	۰/۷۹۱۰	۰/۷۹۳۹	۰/۷۹۶۷	۰/۷۹۹۵	۰/۸۰۲۳	۰/۸۰۵۱	۰/۸۰۷۸	۰/۸۱۰۶	۰/۸۱۳۳
۰/۹	۰/۸۱۵۹	۰/۸۱۸۶	۰/۸۲۱۲	۰/۸۲۳۸	۰/۸۲۶۴	۰/۸۲۸۹	۰/۸۳۱۵	۰/۸۳۴۰	۰/۸۳۶۵	۰/۸۳۸۹
۱/۰	۰/۸۴۱۳	۰/۸۴۳۸	۰/۸۴۶۱	۰/۸۴۸۵	۰/۸۵۰۸	۰/۸۵۳۱	۰/۸۵۵۴	۰/۸۵۷۷	۰/۸۵۹۹	۰/۸۶۲۱
۱/۱	۰/۸۶۴۳	۰/۸۶۶۵	۰/۸۶۸۶	۰/۸۷۰۸	۰/۸۷۲۹	۰/۸۷۴۹	۰/۸۷۷۰	۰/۸۷۹۰	۰/۸۸۱۰	۰/۸۸۳۰
۱/۲	۰/۸۸۴۹	۰/۸۸۶۹	۰/۸۸۸۸	۰/۸۹۰۷	۰/۸۹۲۵	۰/۸۹۴۴	۰/۸۹۶۲	۰/۸۹۸۰	۰/۸۹۹۷	۰/۹۰۱۵
۱/۳	۰/۹۰۳۲	۰/۹۰۴۹	۰/۹۰۶۶	۰/۹۰۸۲	۰/۹۰۹۹	۰/۹۱۱۵	۰/۹۱۳۱	۰/۹۱۴۷	۰/۹۱۶۲	۰/۹۱۷۷
۱/۴	۰/۹۱۹۲	۰/۹۲۰۷	۰/۹۲۲۲	۰/۹۲۳۶	۰/۹۲۵۱	۰/۹۲۶۵	۰/۹۲۷۹	۰/۹۲۹۲	۰/۹۳۰۶	۰/۹۳۱۹
۱/۵	۰/۹۳۳۲	۰/۹۳۴۵	۰/۹۳۵۷	۰/۹۳۷۰	۰/۹۳۸۲	۰/۹۳۹۴	۰/۹۴۰۶	۰/۹۴۱۸	۰/۹۴۲۹	۰/۹۴۴۱
۱/۶	۰/۹۴۵۲	۰/۹۴۶۳	۰/۹۴۷۴	۰/۹۴۸۴	۰/۹۴۹۵	۰/۹۵۰۵	۰/۹۵۱۵	۰/۹۵۲۵	۰/۹۵۳۵	۰/۹۵۴۵
۱/۷	۰/۹۵۵۴	۰/۹۵۶۴	۰/۹۵۷۳	۰/۹۵۸۲	۰/۹۵۹۱	۰/۹۵۹۹	۰/۹۶۰۸	۰/۹۶۱۶	۰/۹۶۲۵	۰/۹۶۳۳
۱/۸	۰/۹۶۴۱	۰/۹۶۴۹	۰/۹۶۵۶	۰/۹۶۶۴	۰/۹۶۷۱	۰/۹۶۷۸	۰/۹۶۸۶	۰/۹۶۹۳	۰/۹۶۹۹	۰/۹۷۰۶
۱/۹	۰/۹۷۱۳	۰/۹۷۱۹	۰/۹۷۲۶	۰/۹۷۳۲	۰/۹۷۳۸	۰/۹۷۴۴	۰/۹۷۵۰	۰/۹۷۵۶	۰/۹۷۶۱	۰/۹۷۶۷
۲/۰	۰/۹۷۷۲	۰/۹۷۷۸	۰/۹۷۸۳	۰/۹۷۸۸	۰/۹۷۹۳	۰/۹۷۹۸	۰/۹۸۰۳	۰/۹۸۰۸	۰/۹۸۱۲	۰/۹۸۱۷
۲/۱	۰/۹۸۲۱	۰/۹۸۲۶	۰/۹۸۳۰	۰/۹۸۳۴	۰/۹۸۳۸	۰/۹۸۴۲	۰/۹۸۴۶	۰/۹۸۵۰	۰/۹۸۵۴	۰/۹۸۵۷
۲/۲	۰/۹۸۶۱	۰/۹۸۶۴	۰/۹۸۶۸	۰/۹۸۷۱	۰/۹۸۷۵	۰/۹۸۷۸	۰/۹۸۸۱	۰/۹۸۸۴	۰/۹۸۸۷	۰/۹۸۹۰
۲/۳	۰/۹۸۹۳	۰/۹۸۹۶	۰/۹۸۹۸	۰/۹۹۰۱	۰/۹۹۰۴	۰/۹۹۰۶	۰/۹۹۰۹	۰/۹۹۱۱	۰/۹۹۱۳	۰/۹۹۱۶
۲/۴	۰/۹۹۱۸	۰/۹۹۲۰	۰/۹۹۲۲	۰/۹۹۲۵	۰/۹۹۲۷	۰/۹۹۲۹	۰/۹۹۳۱	۰/۹۹۳۲	۰/۹۹۳۴	۰/۹۹۳۶
۲/۵	۰/۹۹۳۸	۰/۹۹۴۰	۰/۹۹۴۱	۰/۹۹۴۳	۰/۹۹۴۵	۰/۹۹۴۶	۰/۹۹۴۸	۰/۹۹۴۹	۰/۹۹۵۱	۰/۹۹۵۲
۲/۶	۰/۹۹۵۳	۰/۹۹۵۵	۰/۹۹۵۶	۰/۹۹۵۷	۰/۹۹۵۹	۰/۹۹۶۰	۰/۹۹۶۱	۰/۹۹۶۲	۰/۹۹۶۳	۰/۹۹۶۴
۲/۷	۰/۹۹۶۵	۰/۹۹۶۶	۰/۹۹۶۷	۰/۹۹۶۸	۰/۹۹۶۹	۰/۹۹۷۰	۰/۹۹۷۱	۰/۹۹۷۲	۰/۹۹۷۳	۰/۹۹۷۴
۲/۸	۰/۹۹۷۴	۰/۹۹۷۵	۰/۹۹۷۶	۰/۹۹۷۷	۰/۹۹۷۷	۰/۹۹۷۸	۰/۹۹۷۹	۰/۹۹۷۹	۰/۹۹۸۰	۰/۹۹۸۱
۲/۹	۰/۹۹۸۱	۰/۹۹۸۲	۰/۹۹۸۲	۰/۹۹۸۳	۰/۹۹۸۴	۰/۹۹۸۴	۰/۹۹۸۵	۰/۹۹۸۵	۰/۹۹۸۶	۰/۹۹۸۶
۳/۰	۰/۹۹۸۷	۰/۹۹۸۷	۰/۹۹۸۷	۰/۹۹۸۸	۰/۹۹۸۸	۰/۹۹۸۹	۰/۹۹۸۹	۰/۹۹۸۹	۰/۹۹۹۰	۰/۹۹۹۰
۳/۱	۰/۹۹۹۰	۰/۹۹۹۱	۰/۹۹۹۱	۰/۹۹۹۱	۰/۹۹۹۲	۰/۹۹۹۲	۰/۹۹۹۲	۰/۹۹۹۲	۰/۹۹۹۳	۰/۹۹۹۳
۳/۲	۰/۹۹۹۳	۰/۹۹۹۳	۰/۹۹۹۴	۰/۹۹۹۴	۰/۹۹۹۴	۰/۹۹۹۴	۰/۹۹۹۴	۰/۹۹۹۵	۰/۹۹۹۵	۰/۹۹۹۵
۳/۳	۰/۹۹۹۵	۰/۹۹۹۵	۰/۹۹۹۵	۰/۹۹۹۶	۰/۹۹۹۶	۰/۹۹۹۶	۰/۹۹۹۶	۰/۹۹۹۶	۰/۹۹۹۶	۰/۹۹۹۷
۳/۴	۰/۹۹۹۷	۰/۹۹۹۷	۰/۹۹۹۷	۰/۹۹۹۷	۰/۹۹۹۷	۰/۹۹۹۷	۰/۹۹۹۷	۰/۹۹۹۷	۰/۹۹۹۷	۰/۹۹۹۸
۳/۵	۰/۹۹۹۸	۰/۹۹۹۸	۰/۹۹۹۸	۰/۹۹۹۸	۰/۹۹۹۸	۰/۹۹۹۸	۰/۹۹۹۸	۰/۹۹۹۸	۰/۹۹۹۸	۰/۹۹۹۸
۳/۶	۰/۹۹۹۸	۰/۹۹۹۸	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹
۳/۷	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹
۳/۸	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹
۳/۹	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰